

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

Session 2008

**Épreuve :
MATHÉMATIQUES**

Série

SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LABORATOIRE

**CHIMIE DE LABORATOIRE ET
DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS**

Durée de l'épreuve : 3 heures

coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées aux candidats.

Un formulaire de mathématiques sera distribué au candidat.

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 (4 points)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.

- 2) Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2 .

- 3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2e^{5i\frac{\pi}{6}} ; \quad z_B = 2e^{-5i\frac{\pi}{6}} ; \quad z_C = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

- a) Écrire les nombres complexes z_A , z_B et z_C sous forme algébrique.
 b) Placer les points A , B et C sur une figure.
 c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
 Quelle est la nature du triangle AOC ?

Exercice 2 (5 points)

Dans cet exercice, l'unité de temps est l'heure et l'unité de température est le degré Celsius.

À l'instant $t = 0$, une tarte sort d'un four, à la température de 220° . Elle est alors placée dans une salle à 20° .

On désigne par $f(t)$ la température de la tarte à l'instant t . On définit ainsi une fonction f dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

On suppose que la vitesse $f'(t)$ de refroidissement de la tarte est proportionnelle à la différence entre la température de la tarte et celle de la salle, c'est-à-dire $f(t) - 20$.

On admet donc qu'il existe un nombre réel λ tel que, pour tout nombre réel positif t , $f'(t) = \lambda[f(t) - 20]$.

- 1) On pose : $y(t) = f(t) - 20$.

- a) Montrer que la fonction y ainsi définie est solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
 b) Résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
 c) En déduire que, pour tout nombre réel positif t , $f(t) = Ce^{\lambda t} + 20$, où C est un nombre réel.
 d) En utilisant la valeur de $f(0)$, déterminer C .

- 2)

- a) Au bout d'un quart d'heure (c'est-à-dire pour $t = \frac{1}{4}$), la température de la tarte est égale à 60° .

Montrer que, pour tout nombre réel positif t , $f(t) = 200e^{(-4 \ln 5)t} + 20$.

- b) Déterminer la température de la tarte au bout d'une demi-heure.

Problème (11 points)

On considère la fonction f , définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = e^{2x} - 10e^x + 16$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

- 1) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 2)
 - a) Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f(x) = (e^x - 2)(e^x - 8)$.
 - b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- 3) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = 2e^x(e^x - 5)$.
 - b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 4) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$				7			

- 5)
 - a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
 - b) Construire la droite $\mathcal{T}$ puis, sur le même graphique, la partie de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-3; 2,2]$.
 - c) Compléter le graphique précédent en traçant la droite d'équation $y = 16$. On mettra en évidence le point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\ln 5$, ainsi que la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
- 6)
 - a) Calculer $f(\ln 2)$. Indiquer, sans justification, le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0; \ln 2]$.
 - b) On considère le domaine plan $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$.
 - c) Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ au centième par défaut.