

**BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE**  
**SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES**

**Génie Mécanique**

**Option A : Productique Mécanique**  
**Option F : Microtechniques**

**Génie Energétique**

**Génie Civil**

**MATHEMATIQUES**

**Durée : 4 heures**

**Coefficient : 4**

---

**L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.**

---

**Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.**

**Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.**

**Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.**

**Le formulaire officiel de mathématiques et deux feuilles de papier millimétré sont distribués en même temps que le sujet.**

### Exercice 1 (4 points)

On considère l'équation différentielle (E) :  $4y'' + \pi^2 y = 0$  où  $y$  est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle  $x$ .

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la fonction  $g$ , solution de cette équation, dont la courbe représentative dans un repère du plan passe par le point N de coordonnées  $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$  et qui, en ce point, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ .
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

### Exercice 2 (5 points)

$i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation  $z^2 + 2z + 10 = 0$ .
2. Déterminer les nombres complexes  $c$  et  $d$  vérifiant le système :

$$\begin{cases} -2c + d = 1 + 13i \\ -c + d = 4 + 8i \end{cases}$$

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm.

a) Placer sur une figure les points A, B, C et D dont les affixes respectives sont :

$$-1 + 3i, \quad -1 - 3i, \quad 3 - 5i \quad \text{et} \quad 7 + 3i.$$

b) Démontrer que le triangle BAD est rectangle en A.

c) Démontrer que le triangle BCD est rectangle en C.

d) En déduire que les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on déterminera le centre  $\Omega$  et le rayon. Tracer le cercle sur la figure.

## Problème (11 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$ . On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

### Partie A

L'objet de cette première partie est l'étude des limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2. a) Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x} (x \ln x + 1)$ .

On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ . En déduire la limite de  $f$  en 0.

b) Montrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote  $\mathcal{D}$  dont on donnera une équation.

### Partie B – Étude d'une fonction intermédiaire.

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ .

1. a) On désigne par  $g'$  la dérivée de la fonction  $g$ .

Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $g'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$ .

b) Étudier le signe de  $g'(x)$ . En déduire que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ . L'étude des limites n'est pas demandée.

2. a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[\frac{1}{2} ; 1]$ .

b) Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

3. Déduire des questions **B1.** et **B2.** le signe de  $g(x)$ , pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

### Partie C – Étude des variations de la fonction $f$ et construction de la courbe associée.

1. a)  $f'$  désignant la dérivée de  $f$ , calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = e^{-x} g(x)$ , pour tout nombre  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
b) En déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .  
b) Calculer une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $f(\alpha)$ , en prenant 0,6 pour valeur approchée de  $\alpha$ .
3. a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

|                         |      |     |      |   |      |     |      |   |      |     |
|-------------------------|------|-----|------|---|------|-----|------|---|------|-----|
| $x$                     | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,25 | 2,5 |
| $f(x)$ à $10^{-1}$ près |      |     |      |   |      |     |      |   |      |     |

- b) Construire l'asymptote  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; 2,5]$ .

### Partie D – Calcul d'aire

1. Montrer que la fonction  $F$ , définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $F(x) = e^{-x} \ln x$  est une primitive de  $f$ .
2. On désire calculer l'aire de la partie  $\mathcal{E}$  du plan comprise entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = 2$ .
  - a) Hachurer la partie  $\mathcal{E}$  sur le dessin.
  - b) Déterminer la valeur exacte de l'aire de  $\mathcal{E}$  en unités d'aires, puis en  $\text{cm}^2$ .